

Задача	Тематика	Алгоритмическая сложность	Техническая сложность
1. Таблица	Математика, динамическое программирование	средняя	средняя
2. Гомотетия	Геометрия	средняя	средняя
3. Информатизация садоводства	Перебор	высокая	высокая

Краткие комментарии к решению задач

Задача 1. Таблица

Для решения задачи рассмотрим разность между числами $a_{i,j}$ и $a_{i-1,j}$. В таблице светло-серым цветом отмечены клетки, числа в которых входят в сумму для $a_{i-1,j}$ и для $a_{i,j}$, а темно-серым – клетки, числа в которых входят только в сумму для $a_{i,j}$.

				$a_{i-1,j}$		
				$a_{i,j}$		

Заметим, что $a_{i,j} = 2a_{i-1,j} + b_{i-1,j-1} + c_{i-1,j+1}$, где как $b_{i-1,j-1}$ обозначена сумма чисел на диагонали, начинающейся в клетке $(i-1, j-1)$ и идущей влево вверх, а как $c_{i-1,j+1}$ обозначена сумма чисел на диагонали, начинающейся в клетке $(i-1, j+1)$ и идущей вправо вверх. Заметим, что числа $b_{i,j}$ и $c_{i,j}$ можно каждое за $O(1)$ пересчитывать при переходе к очередной строке. Таким образом, вычисление каждого $a_{i,j}$ также требует $O(1)$ операций, а суммарное время работы составляет $O(nm)$.

Задача 2. Гомотетия

Первым шагом решения является поиск коэффициента гомотетии – его модуль равен квадратному корню из отношения площадей. Для дальнейшего решения заметим, что при применении гомотетии вершины многоугольника перейдут также в вершины, поэтому далее необходимо перебрать, в какую из вершин второго многоугольника перейдет первая вершина первого многоугольника.

Далее, по известному коэффициенту гомотетии, координатам точки и ее образа можно найти координаты центра гомотетии. После этого следует проверить, действительно ли полученная гомотетия переводит первый многоугольник во второй. Эту проверку можно выполнить за линейное время, если учесть, что при гомотетии сохраняется порядок обхода вершин многоугольника. Отметим, что при этом следует рассмотреть как случай положительного коэффициента гомотетии, так и случай отрицательного.

Описанное решение требует выполнения $O(n^2)$ операций, так как на перебор вершин, соответствующей первой вершине первого многоугольника требуется $O(n)$ операций, а на проверку гомотетии – также $O(n)$.

Задача 3. Информатизация садоводства

Для решения этой задачи воспользуемся методом «разделяй-и-властвуй» – заметим, что искомые прямоугольники отделены друг от друга либо вертикальной, либо

горизонтальной прямой. Отметим, что в качестве таких прямых следует рассматривать только прямые, проходящие через границы участка или существующих на нем построек. Если зафиксировать одну из таких прямых, то задача сводится к поиску прямоугольника максимальной площади, лежащего целиком внутри некоторого прямоугольника и не пересекающегося с заданными прямоугольниками.

Для решения этой задачи заметим, что стороны искомого прямоугольника лежат на прямых, проходящих через стороны заданных прямоугольников. Поэтому необходимо перебрать все возможные четверки таких прямых и для каждой из них проверить, что построенный на них прямоугольник не пересекается с уже существующими. Суммарное время, требуемое на эти операции, составляет $O(n^5)$.

Если учесть, что число возможных разделяющих прямых есть $O(n)$, то получается оценка $O(n^6)$ на суммарное время работы описанного алгоритма.